Неперовата константа

23 юни 2011 г.

Мотивация

“Как ще отговориш, ако някой те пита “Какво са числата?”?”

“Няма да започна обяснението си от Set Theory, защото самият аз не я разбирам. Ще очаквам, че този, който пита знае какво е числото 1 и как да прибави 1 към него. Ако знае това, ще му кажа, че числата са невероятно красиво построение, че това, което вече знае, е достатъчно, за да му разкажа как са построени, че фактът, че числата са полезни в реалния живот, е просто част от The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences [2].”

“И как са построени?”

“Ще го упътя към лекциите на Файнман [1], глава “Алгебра”.”

“И предполагам, че там става дума и за скъпоценния камък на Математиката.”

“Да, в тази глава Файнман дефинира неперовата константа “експериментално”. Той забелязва, че когато се степенува едно число (примерно A) “магически” се оказва, че ако показателят (ϵ) е много близък до нула то следното приближение е валидно: $A^\epsilon \approx 1 + c\epsilon$, където c е константа зависеща само от A. Той дефинира неперовата константа e, като основата, за която тази формула е най-елементарна (т.е. $c = 1$ и $e^\epsilon \approx 1 + \epsilon$). Още по-”магически” е фактът, че това число изскача на много други места в Математиката[1].”

Характеризации

“Как е дефинирана неперовата константа?”

“Няколко еквивалентни дефиниции:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{2}$$

[1]Нищо не е магическо, просто не сме израстнали достатъчно, за да разберем, че всички тези места в Математиката са едно и също нещо гледано от различни страни.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{de^x}{dx} = e^x \tag{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{d\log_e(x)}{dx} = \frac{1}{x} \tag{4}$$

Трябва да разполагаш с дефинициите на експонентата и логаритъма, за да ползваш 3 или 4. Те се дефинират лесно за цели числа. Останалото е просто - използваш основните правила, които ги управляват ($a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$ и $\log_a\left(a^b\right) = b$) и казваш, че тези правила са валидни и за останалите числа (не само цели). Дефиницията на Файнман е еквивалентна на 3, ако знаеш какво е "линейно приближение"."

$e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x$

"От къде се взе тази магия?"

"Всъщност всичко което е необходимо за да я докажем е $\frac{de^x}{dx} = e^x$, $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$, $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$ и $e^0 = 1$, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 1$. След това смятаме разлагането в ред на Тейлор и получаваме резултата."

"Няма ли интуитивен начин да се гледа на този резултат? Наистина ли ни трябва анализ, за да го докажем?"

"Може би има красив интуитивен начин да гледаме.

1. Знаем, че ако начертаем точките $(\cos x; \sin x)$ за $x \in [0; 2\pi]$ то ще получим кръг с радиус 1. Знаем, че за да получим такъв кръг е достатъчно просто да завъртим точката (1; 0) около центъра на координатната система (това май е тафтология). Знаем че точката $(\cos x; \sin x)$ е върху този кръг и е просто (1; 0) завъртяна с x радиана. Знаем, че в комплексната равнина това е $\cos x + \imath \sin x$.

2. Знаем, че да умножим числото a по комплексното число b е същото като да 1. завъртим точката отговаряща на a в комплексната равнина с ъгъл зависещ от b и 2. да разтеглим или смачкаме комплексната равнина няколко пъти зависещи отново от b

3. Търсим числото b, което отговаря на завъртане с много малък брой радиани (ϵ). Намираме, че това е $1 + \imath\epsilon$. Използвайки дефиницията на Файнман го записваме като $e^{\imath\epsilon}$. Сега можем да построим завъртане с много по-голям ъгъл $n\epsilon$, просто като умножим b по себе си n пъти (защото както казахме, умножение по b е същото като завъртане). И вместо да пишем $(1 + \imath\epsilon)^n$ просто пишем[2] $e^{\imath n\epsilon}$.

4. Наричаме нашия ъгъл на завъртане $x = n\epsilon$ и прилагаме умножението върху точката (1; 0). В комплексната равнина това е просто числото 1. Намерили тази точка по два начина просто записваме равенството между двата израза: $e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x$.

[2] Не можем да напишем $(1 + \imath n\epsilon)$, защото $n\epsilon$ не е малък ъгъл.

"

Литература

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics.-Volume 1: Mainly Mechanics, Radiation and Heat.* Addison-Wesley, 1963.

[2] E. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Mathematics: people, problems, results.*