

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://www.iheb.org>

Concours Général de Physique

“Minko Balkanski”

15 mai 2010

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на двете задачи съответно на френски и английски език. Част трета съдържа фигурите използвани за онагледяване на въпросите и помощни таблици. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат *яснотата и стилът* на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. *Пишете само на езика, който сте избрали* (френски или английски).

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете *без да повдигате въпроси към квесторите*.

Решенията ще бъдат изложени на сайта на Фондация Миню Балкански в деня на състезанието. Класирането ще бъде изложено също там месец по-късно. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към krastanov.stefan@gmail.com. Обсъждане на решенията ще е възможно на shkolata.org. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Бъдете сигурни да попълните правилно информацията за контакт.

Разполагате с 4 часа. Успех!

Première partie

Français

1 Transformée de Fourier, Interférence et Traitement des Images (Filtrage des Fréquences Spatiales)

Le phénomène d'interférence est lié à l'opération mathématique appelée transformée de Fourier. Dans ce problème on va essayer de retrouver un sous-ensemble intéressant des propriétés de cette opération en utilisant des idées de base concernant l'interférence. Alors connaissance antérieure sur la transformée de Fourier n'est pas nécessaire. Pour ceux qui s'intéresse plus d'information peut être trouver dans *[Fisher et al., 1996]*.

On va voir comment utiliser l'interférence dans le filtrage des fréquences spatiales d'une image (comment obtenir à partir d'une image contenant des motifs répétitifs une autre image ne contenant que certains motifs).

1.1 Réseau de Diffraction

Dans cette partie on va s'intéresser par le phénomène d'interférence observé avec un réseau de diffraction.

1.1.1 Figure de Diffraction à l'infinie

Décrire un réseau de diffraction.

Un réseau de diffraction parfait est un réseau avec des fentes beaucoup plus petites que la distance entre deux fentes. Quelles sont les conséquences de cette approximation ?

Considérons un laser vert comme source de lumière cohérente monochromatique de $\lambda = 550\text{nm}$ et un réseau de diffraction parfait (c.f. fig 1a). Quelle doit être l'orientation du réseau pour avoir une figure de diffraction paramétrée par l'angle θ ?

Où est-ce qu'on observe la figure de diffraction au mieux ? Pourquoi ?

Donner une expression pour l'amplitude de la lumière en fonction de θ , la distance a entre les fentes du réseau, N le nombre des fentes et autre paramètres convenables.

Où sont les maxima d'intensité en fonction de θ ?

Question bonus : Pourquoi on utilise des réseaux de diffraction dans les laboratoires et non pas des fentes doubles même si les fentes doubles sont plus faciles à construire ?

1.1.2 Visualisation sur l'écran

On veut observer la figure de diffraction sur un écran (c.f. fig 1b). Où doit-on mettre une lentille convergente $f = 100\text{cm}$? Pourquoi ?

Où sont les maxima (paramétrés par x) ? Quelle type de réseau doit être utilisé pour obtenir des maxima séparés par 1mm ? Pour 5mm ?

1.1.3 Interférence par la figure de diffraction

On s'intéresse par l'obtention d'interférence en utilisant comme source la figure de diffraction elle-même construite dans 1.1.2.

Observations : Comment peut-on créer une image (de grandissement unitaire) d'un objet dans l'approximation d'optique géométrique en utilisant une lentille convergente de $f = 100\text{cm}$?

1. Qu'est-ce qu'on observe sur l'écran si notre objet est l'un des réseaux de diffraction de 1.1.2 ?
2. Qu'est-ce qu'on observe si on déplace l'écran à une distance de 100cm de la lentille ?

Explication : Nous expliquons les deux dernières observations avec le fait que l'image peut être interprétée comme le résultat d'interférence à partir de la figure de diffraction elle-même¹. *Pour simplifier le problème on considère que les maxima sont des sources ponctuelles de lumière cohérente et que entre eux il n'y a pas des sources*². Pour aider dans la compréhension on va appeler la figure de diffraction créée par le réseau de diffraction *la figure primaire*. La figure créée par l'interférence à partir de la figure primaire va s'appeler *la figure secondaire*³.

Qu'est-ce qu'on va observer comme image (figure secondaire) selon ces simplifications (considérons un nombre fini des maxima dans la figure primaire⁴) ? Comparer les résultats avec les prévisions des questions précédentes (la construction géométrique dans la section « Observations ») ? Quel sont les artefacts créés par l'approximation ?

On place un écran opaque sur la figure primaire. Dans l'écran il y a une ouverture qui ne laisse passer que le maximum central. Qu'est ce qu'on observe dans ce cas ?

1.2 Diffraction par deux réseaux superposés

Imaginons la superposition des deux réseaux de 1.1.2. Les fentes qui coïncident emmêlent deux fois la radiation d'une seule fente. Le nombre des fentes est tel que les réseaux ont les mêmes dimensions. Le réseau avec $a = 0.55\text{mm}$ a $N = 100$ fentes. Combien des fentes a l'autre réseau ?

1.2.1 La figure de diffraction

Donner l'amplitude après les réseaux en fonction d'angle.

Caractériser les maxima dans la figure de diffraction (observés sur un écran en utilisant la même lentille $f = 100\text{cm}$).

1. La figure de diffraction est considérée comme la source de lumière. Nous oublions le réseau de diffraction qui a créé la figure premièrement.

2. Les deux approximations ne sont pas rigoureusement correctes (les maxima ont des dimensions finies et l'intensité dans l'espace entre les maxima n'est pas nulle). De plus on néglige la question de la phase.

3. Ces conventions de nomenclature ne sont pas universelles.

4. Il n'y a pas besoin de vous occuper avec le nombre des maxima dans la figure primaire. Fixer le à une constante n .

1.2.2 L'image (la figure de diffraction secondaire créée par l'interférence à partir de la figure primaire)

Qu'est-ce qu'on va observer sur l'écran dans la configuration de 1.1.3? Expliquer en utilisant la méthode discutée dans 1.1.3(interférence secondaire à partir de la figure primaire).

1.2.3 Filtrage de la fréquence élevée

On place un écran opaque sur la figure de diffraction primaire. L'écran a une ouverture qui ne laisse que 4 maxima voisins passer. Qu'est-ce qu'on observe sur l'écran?

1.3 Filtrage d'une plume

Considérons une plume. Elle est composée d'une poutre centrale (le rachis), qui est support pour des poutres secondaires (les barbes), qui sont des supports pour les barbules (des filaments excrément petits) (fig 2). Considérons la distance entre les barbules égale à 0.01mm. Décrire un montage optique complet qui donne une image de la plume (de grandissement unitaire) ne contenant pas les barbules. Spécifier les dimensions (ne donner que des ordres de grandeur).

1.4 Anticrénelage

L'image dans fig 3 est crénelée. Quelle est la cause?

Considérons une webcam. Le capteur a des pixels rectangulaires des largeur $5\mu\text{m}$. La distance entre l'objective et le capteur est fixée $b = 1\text{cm}$ Comme c'est une caméra à bas prix la distance focale est fixe pour avoir des objets a une distance de 1m . Qu'est-ce on doit faire pour veiller à l'absence de crénelage?

2 On the origin of gravity

En Janvier 2010 le physicien E.Verlinde publie un article intitulée « On the origin of gravity » [Verlinde, 2010] dans lequel il interprète la gravité comme une force entropique. L'objet de ce problème est de retrouver certains résultats de cette théorie. La théorie n'a pas beaucoup de traction à cause de la présence des arguments cycliques⁵, mais c'est une construction théorique intéressante.

2.1 La force entropique

Considérons un ensemble thermodynamique isolé caractérisé par son énergie totale E , son entropie S et sa température T .

1. A partir des deux premiers principes de la thermodynamique, donner une relation entre dE , dS et dV (avec V le volume).
2. L'énergie d'ensemble est constant pendant la transformation suivante. Quelle force doit être applique pour effectuer un déplacement dx d'extrémité de l'ensemble et un changement dS dans l'entropie.
3. Cette force est une force d'origine entropique. Commenter et donner des exemples de ce type de force.

2.2 Effet d'Unruh

Le physicien Bill Unruh à découvert en 1976 qu'un observateur placé dans un référentiel accéléré subit une température T lié à son accélération a . L'effet est analogues à la radiation d'Hawking, mais l'horizon des événements est créé par l'accélération et non pas par la gravité. Pour cette partie on considère connues la relation d'Heisenberg $dpdx \simeq \frac{\hbar}{2}$ et l'équation d'Einstein $E = mc^2$.

1. Donner une relation de type Heisenberg entre l'énergie E d'une particule et la distance x parcourue pendant sa vie. Expliquer votre raisonnement.
2. Le déplacement d'une particule virtuelle est clairement dépendent de c (car c est le paramètre dans la théorie donnant l'effet - la relativité) et a . Donner l'énergie d'une particule virtuelle en utilisant une méthode dimensionnelle (à un prefacteur d'ordre de l'unité près). Donner la température observée par l'observateur (à un prefacteur d'ordre de l'unité près). Ce prefacteur (qui est difficile à trouver) est $\frac{1}{6}$.

5. c.f. [Kobakhidze, 2010][Mäkelä, 2010]

2.3 Théorie de Verlinde

E. Verlinde prends deux hypothèses pour construire son résultat :

Hypothèse 1 : Toute l'information d'un système peut être décrite sur un écran à 2 dimensions (principe holographique).

Hypothèse 2 : Quand la particule se déplace d'une longueur d'onde de Compton $\lambda = \frac{h}{mc}$, l'entropie de l'écran change de $dS = \alpha k$ avec α un paramètre que nous déterminerons et k la constant de Boltzmann. (pour motivation cf. [Bekenstein, 1973])

2.3.1 Écran plan

Dans cette partie on considère que l'écran est un plan et subit une accélération a vers une particule.

1. Donner le changement dS de l'entropie en fonction d'un déplacement dx en considérant que S est une fonction linéaire de x .
2. Quelle est la force qui s'exerce sur la particule associé au changement dS .
3. Si la température T subit par le système provient de son accélération, donner une expression pour la force F . Quelle est la valeur de α pour retrouver une loi physique bien connue.

2.3.2 Écran sphérique

Dans cette partie on considère que la particule évolue à proximité d'un écran sphérique de rayon R (un trou noir).

1. Donner la masse de cet écran sphérique en utilisant l'hypothèse holographique sous la forme $N = \beta A$ (N - nombre des bits d'informations, A - aire d'écran, β - coefficient de proportionnalité) et le théorème l'équipartition de l'énergie $E = \frac{1}{2} N k_b T$. Expliquer votre raisonnement.
2. Quelle est la force qu'exerce l'écran sur la particule exprimé en fonction de la masse M , de la masse de la particule m et du rayon R de la sphère. Quelle est la valeur de β pour obtenir une autre loi connue en physique.

Part II

English

1 Fourier transform, Interference and image treatment (filtering of spatial frequencies)

The phenomenon of interference is closely related to the mathematical operation called Fourier transform. In this problem we will try to derive an important and interesting subset of the properties of that relation from basic knowledge about interference, so any previous knowledge about Fourier transforms will not be required. In fact we will not use at all the notion of Fourier transform but the curious reader is encouraged to study it (see [Fisher et al., 1996] and the wikipedia article on aliasing).

We will see how interference can be used to filter out spatial frequencies from an image (meaning that from an image containing a number of repeating patterns we will obtain an image containing only some of those patterns).

1.1 Diffraction grating

In this part we will be interested by the phenomena of interference observed with a standard diffraction grating.

1.1.1 Diffraction pattern at infinity

Describe what is a diffraction grating.

Here we will call perfect diffraction grating a diffraction grating with transmissive slits much thinner than the distance between two slits. What are the consequences from this approximation?

Consider a green laser giving coherent monochromatic light of $\lambda = 550\text{nm}$ and a perfect diffraction grating in configuration as shown in figure 1a. How should the grating be oriented as to have a diffraction pattern parameterized by angle θ ?

Where can the diffraction pattern be observed at its best? Why?

Give an expression for the amplitude of the light received as a function of θ , the distance a between slits in the diffraction grating, the number of slits N and other parameters that you see fit.

Where are the maxima of intensity as a function of θ ?

Bonus question: Why diffraction gratings are more widely used in labs than simple double-slit masks⁶ although the latter are easier to manufacture?

1.1.2 Visualization on a screen

We want to observe the figure of diffraction on a screen as shown in fig 1b. Where should a convergent lens of $f = 100\text{cm}$ be placed? Why?

Where are the maxima (parameterized by x)? What grating must be used to obtain maxima separated by 1mm ? What about 5mm ?

1.1.3 Interference by the diffraction pattern

Here we are interested in obtaining an interference using as a source the diffraction pattern obtained in 1.1.2 itself.

Observations: How can one create an image (of magnification unity) of an object in geometric optics using a convergent lens of $f = 100\text{cm}$? The image should be observable on a screen.

1. What will be observed on the screen if our object is one of the diffraction gratings from 1.1.2?
2. What will be observed if the screen is moved closer to the lens to a distance of 100cm ?

Explanation: We explain the last two observations with the fact that the image may be thought of as the result of the interference from the diffraction pattern itself⁷. *To simplify the problem we will consider the maxima to be point sources of coherent light and that there is no light coming from between them*⁸. To facilitate understanding we will call the diffraction pattern created by the diffraction grating *the primary pattern*. The pattern due to the interference from the primary pattern will be called *the secondary pattern*⁹.

What will be the image (that is the secondary pattern) observed according to that simplification (considering a fixed number of maxima in the primary pattern¹⁰)? Compare the results with the prediction from the previous questions (the geometric construction from section Observations)? What are the artifacts induced by the approximation?

What will happen if we place an opaque screen over the primary pattern with a hole letting only the central maximum pass?

1.2 Diffraction from two overlapping gratings

Imagine the superposition of the two gratings from 1.1.2. If two slits coincide then they give off twice the radiation that they would give off if only one slit was present at the given point. The number of slits for each grating is chosen so the grating can cover the same space (neither is smaller in dimensions than the other).

If the grating with $a = 0.55\text{mm}$ has $N = 100$ slits, how many slits should the other grating have?

1.2.1 The pattern

Give an expression for the amplitude received from the gratings as a function of the angle.

Characterize the maxima of the diffraction pattern (observed on a screen using the same lens of $f = 100\text{cm}$).

6. Like the ones in the Young experiment

7. The diffraction pattern is considered to be the source of light that will interfere. We ignore the diffraction grating that has created the pattern in the first place.

8. Both of those assumptions are not rigorously correct as the maxima have a finite size and the intensity is nonzero between them. Moreover we are completely overlooking the question of phase.

9. Those naming conventions are not universal.

10. That means that you do not need to bother yourself with the number of maxima that are present in the primary pattern. Take the number to be some constant n .

1.2.2 The image (the secondary pattern created by interference from the first pattern)

Following the method discussed in 1.1.3(i.e. secondary interference from the primary diffraction pattern) explain what will be observed on the screen (using the optical system discussed in 1.1.3).

1.2.3 Filtering the high frequency

We place an opaque screen over the primary diffraction pattern with an opening letting only four of the small maxima (neighboring). What will be observed on the screen?

1.3 Filtering a feather

Consider a feather. It is composed of the main central beam, many secondary beams starting from it and many more small barbules starting from the secondary beams (fig 2). Consider the distance between barbules to be 0.01mm. Describe a *complete* optical set up with which one can obtain an image of the feather (of magnification one) that does not contain the barbules. Specify the dimensions (consider only orders of magnitude).

1.4 Antialiasing

The picture at fig 3 is exhibiting aliasing. What is causing it?

Consider a digital camera with a sensor corresponding to a pixel size of $5\mu\text{m}$ and distance between the objective and the sensor $b = 1\text{cm}$. It is a cheap webcam so the focus is fixed for objects at 1m . What should be done to ensure the lack of aliasing?

2 On the origin of gravity

In January 2010 the physicist E. Verlinde published an article entitled 'On the origin of gravity' [Verlinde, 2010] where he interprets the force of gravity as an entropic force. The objective of this problem is to show some of the results obtained by this theory. The theory is not widely supported due to the presence of some cyclic arguments¹¹ but is nonetheless an interesting theoretical construction.

2.1 The entropic force

We consider an isolated thermodynamical system characterized by its total energy E , entropy S and temperature T .

1. Using the first law of thermodynamics and the definition of entropy give the relation between dE , dS and dV (where V is the volume).
2. The energy of the system is constant in the following transformation. What force must be applied in order to create a displacement dx of the border of the system and a dS change in the entropy.
3. That is a force with entropic origin. Comment and give an example of such forces.

2.2 Unruh Effect

The physicist Bill Unruh proved in 1976 that an observer in an accelerated referential system will observe a temperature T dependent on his acceleration a . The effect is analogous to Hawking radiation but the event horizon is due to the acceleration and not gravity. For this section the Heisenberg inequality $dpdx \simeq \frac{\hbar}{2}$ and Einstein's formula $E = mc^2$ are considered known.

1. Give a relation of Heisenberg's type between the energy E of a particle and the distance x traveled during its lifetime. Explain your reasoning.
2. The displacement of a virtual particle is clearly related to c (because c is the parameter in the theory predicting the effect - the relativity) and a . Give the energy of a virtual particle using dimensional analysis (to the accuracy of a factor on the order of one). Give the temperature observed by the observer (to the accuracy of a factor on the order of one). That factor (which is difficult to find) is $\frac{1}{6}$.

11. c.f. [Kobakhidze, 2010][Mäkelä, 2010]

2.3 The theory of Verlinde

E. Verlinde makes two hypothesis:

Hypothesis 1: All the information about a system can be contained on a two dimensional screen (the holographic principle).

Hypothesis 2: As a particle is displaced by one Compton wavelength $\lambda = \frac{h}{mc}$, the entropy of the screen changes by $dS = \alpha k$ where α is a parameter to be found and k is Boltzmann's constant. (for background information see [Bekenstein, 1973])

2.3.1 Flat screen

In this section we consider the screen to be a plane moving towards a particle with acceleration a .

1. Give the change dS in the entropy as a function of the displacement dx considering that S is a linear function of x .
2. What is the force exercised over the particle linked to the change dS .
3. Give an expression for the force felt by the particle considering that the temperature T felt by the system is caused by its acceleration. What is the value of α that gives a well known law?

2.3.2 Spherical screen

In this section we consider a particle near a spherical screen (a black hole).

1. Give the mass of the screen using the holographic principle in the form $N = \beta A$ (N - bits of information, A - screen area, β - coefficient of proportionality) and the equipartition of energy theorem $E = \frac{1}{2}Nk_bT$. Explain your reasoning.
2. What is the force exercised by the screen on the particle as a function of the mass of the screen M , the mass of the particle m and the radius of the sphere R ? What value of β will give another well known law?

Troisième partie
Annexe

1 Figures

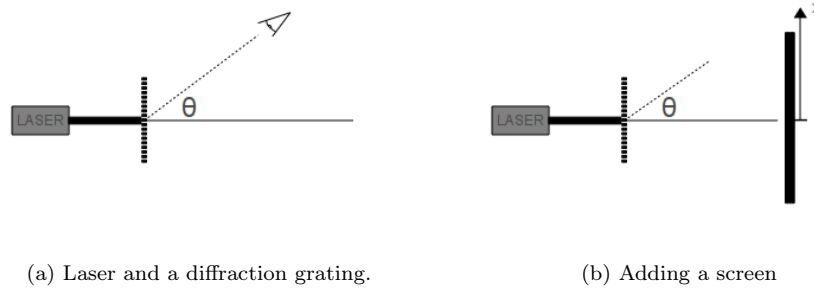


Figure 1:

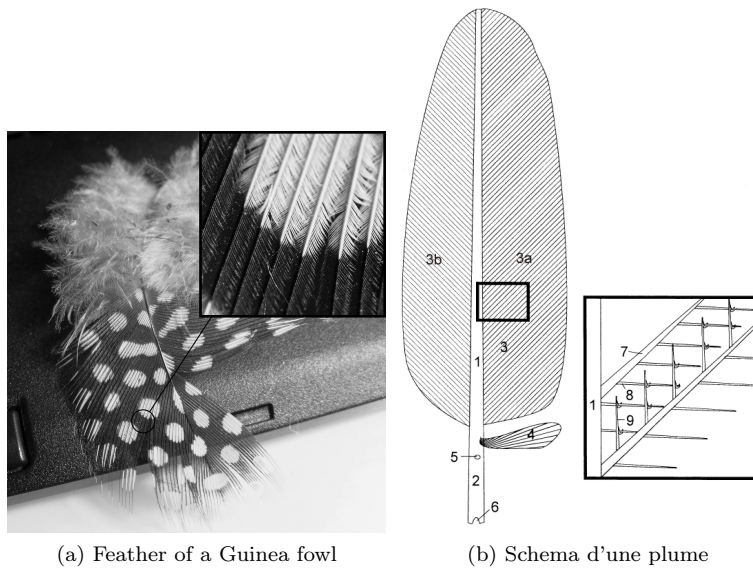


Figure 2: source Wikimedia Commons

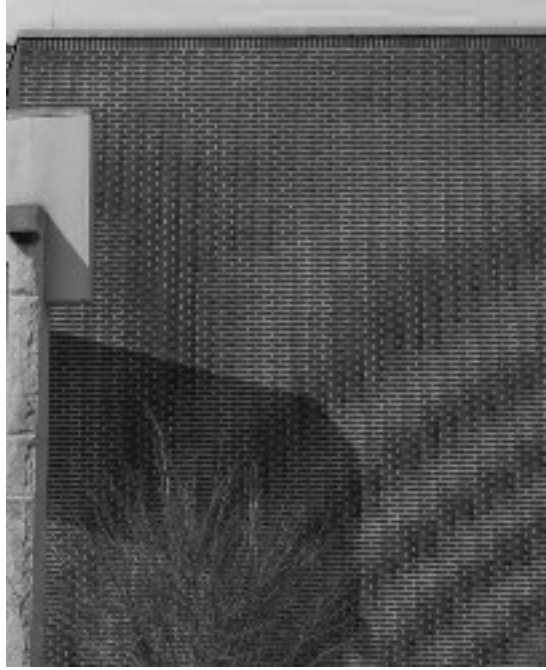


Figure 3: Aliasing - the wavy pattern at the right bottom end of the brick wall, Wikimedia Commons

2 Tables des formules

Séries :
$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Trigonométrie : $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$; $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$.

Intégrales : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n} + C$; $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$; $\int \exp(ax) dx = \frac{\exp(ax)}{a} + C$;
 $\int \sin(ax) = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$; $\int \cos(ax) = \frac{\sin(ax)}{a} + C$.

Complexes : $i^2 = -1$; $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$; $\overline{(x + iy)} = (x - iy)$;
 $\|x + iy\| = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Thermodynamique : 1. principe $dU = dQ - pdS$; entropie $dS = \frac{dQ}{T}$.

Références

- [Bekenstein, 1973] Bekenstein, J. D. (1973). Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8) :2333–2346.
- [Fisher et al., 1996] Fisher, R., Perkins, S., Walker, A., and Wolfart, E. (1996). *Hypermedia image processing reference*. Wiley.
- [Kobakhidze, 2010] Kobakhidze, A. (2010). Gravity is not an entropic force. *Arxiv preprint arXiv :1009.5414*.
- [Mäkelä, 2010] Mäkelä, J. (2010). Notes concerning" on the origin of gravity and the laws of newton" by e. verlinde (arxiv : 1001.0785). *Arxiv preprint arXiv :1001.3808*.
- [Verlinde, 2010] Verlinde, E. (2010). On the origin of gravity and the laws of newton. *Arxiv preprint arXiv :1001.0785*.